Proceedings of IAM, V.6, N.1, 2017, pp.151-156

О РАВНОМЕРНОЙ В ОБЛАСТИ ОЦЕНКЕ МОДУЛЯ СОБСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО БОЛЬШОЙ ПАРАМЕТР НА ЧАСТИ ОБЛАСТИ*

С.Т. Гусейнов[1]

[1]Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: sarvanhuseynov@rambler.ru

Резюме. Рассматривается эллиптический оператор второго порядка, коэффициенты которого содержат большой параметр на части области. Найдена оценка максимума модуля нормированных собственных функций с постоянными, не зависящими от малого параметра.

Ключевые слова: равномерная эллиптичность, собственные функции.

AMS Subject Classification: 35j25, 35j67, 35j70.

1. Введение

Настоящая работа посвящена оценке максимума модуля собственных функций эллиптического оператора

$$L_\varepsilon u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\omega_\varepsilon(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \tag{1}$$

определенного в ограниченной липшицевой области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Коэффициенты оператора $a_{ij}(x)$ измеримы и симметричны, удовлетворяют условию равномерной эллиптичности

$$\alpha^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \alpha|\xi|^2, \tag{2}$$

$\omega_\varepsilon(x)$ -неотрицательный вес, который мы сейчас определим.

Предполагается, что область D разделена гиперплоскостью $\sum = \{x : x_n = 0\}$ на части $D^{(1)} = D \cap \{x : x_n > 0\}$ и $D^{(2)} = D \cap \{x : x_n < 0\}$ и

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, \; x \in D^{(1)} \\ \varepsilon^{-1}, \; x \in D^{(2)}, \varepsilon \in (0,1] \end{cases} \tag{3}$$

Нашей целью будет равномерная по ε оценка собственных функций задачи

$$-Lu = \lambda\omega_\varepsilon(x)u, \; u\big|_{\partial D} = 0, \tag{4}$$

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 07.03.2017

нормированных равенством

$$\int_D u^2 \omega_\varepsilon dx = 1. \qquad (5)$$

Ниже $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ означает замыкание $C_0^\infty(D)$ по норме классического Соболевского пространства функций $W_2^1(D)$, которые L_2 -суммируемы в D вместе со всеми обобщенными производными первого порядка. Решение задачи (4) понимается в смысле интегрального тождества

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_D a_{ij}(x)\omega_\varepsilon(x) u_{x_j} \varphi_{x_i} dx + \lambda \int_D \omega_\varepsilon(x) u \varphi dx = 0, \qquad (6)$$

выполненного на пробных функциях $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Оценкам собственных функций равномерно эллиптических операторов вида

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \qquad (7)$$

посвящены многочисленные исследования (см.[3]-[8]). В частности, в работе В.А. Ильина и И.А. Шишмарева [3] показано, что если область и коэффициенты $a_{ij}(x)$ достаточно гладкие, то для собственной функции $u_m(x)$, отвечающей собственному значению λ_m, имеет место оценка

$$\sup_{x \in D} |u_m(x)| \le C \lambda_m^{\frac{n}{4}}. \qquad (8)$$

Если коэффициенты $a_{ij}(x)$ оператора (7) измеримы, то В.Я. Якубовым, показано, что оценка (8) является точной.

Основной результат настоящей работы изложен в следующей теореме.

Теорема 1. Если выполнено условие (2), то в предположении (5) для собственных функций задачи (4) справедлива оценка (8) с постоянной C, зависящей только от n, области D и константы α из (2).

Отметим, что свойство решений уравнения $L_\varepsilon u = 0$, где L_ε - операторы вида (1), достаточно хорошо изучены. Так, в работе [2] доказана гельдеровская непрерывность решений с показателем Гельдера, не зависящим от ε, а в работе [1] установлено равномерное по ε неравенство Харнака для неотрицательных решений, соответствующее данному уравнению. После перечисленных результатов естественно было предположить и справедливость оценки (8), заявленной в теореме 1.

2. Оценка максимума модуля собственных функций

Для простоты изложения предположим, что $n>2$. Будем при $i=1,2$ пользоваться теоремой вложения Соболева

$$\left(\int_{D^{(i)}}|\varphi|^{2k}dx\right)^{1/k}\le C(n,D)\int_{D^{(i)}}|\nabla\varphi|^2dx,\ \varphi\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(D),\ \ k=n/(n-2). \tag{9}$$

Будем считать, что решение задачи (4) продолжено нулем в дополнение области *D*.

Леммы 2.1. Для решения задачи (4) справедливо неравенство

$$\sup_{x\in D}|u(x)|\le C(\alpha,n,D)\lambda^{n/4}\left(\int_D u^2dx\right)^{1/2}. \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$u_+(x)=\begin{cases}u(x),\ если & u(x)>0,\\ 0, \quad если & u(x)\le 0.\end{cases}$$
$$u_-(x)=\begin{cases}-u(x),\ если & u(x)<0,\\ 0, \quad\quad если & u(x)\ge 0.\end{cases} \tag{11}$$

Выберем сначала в (6) пробную функцию $\varphi(x)=(u_+(x))^\beta$, где $\beta\ge 1$. После простых оценок, использующих условие (2) и неравенство Коши, придем к соотношению

$$\int_D|\nabla u_+|^2(u_+)^{\beta-1}\omega_\varepsilon dx\le C(\alpha)\lambda\int_D(u_+)^{\beta+1}\omega_\varepsilon dx,$$

откуда (см. (3)) будем иметь

$$\int_{D^{(2)}}|\nabla u_+|^2(u_+)^{\beta-1}\omega_\varepsilon dx\le C(\alpha)\lambda\int_D(u_+)^{\beta+1}dx. \tag{12}$$

Отсюда по неравенству Соболева (9) найдем

$$\left(\int_{D^{(2)}}(u_+)^{k(\beta+1)})dx\right)^{1/k}\le C(\alpha,n,D)(\beta+1)^2\lambda\int_D(u_+)^{\beta+1}dx. \tag{13}$$

Получить аналогичную оценку в $D^{(1)}$ столь простым способом уже нельзя. Пусть $\tilde{u}(x)-$ четное продолжение $u_+(x)$ из $D^{(2)}$ в $D^{(1)}$ относительно гиперплоскости $\sum$ и

$$G=D^{(1)}\cap\{x:u_+(x)>\tilde{u}(x)\}.$$

Выбирая в (6) пробную функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases} u_+^{\beta}(x)-\tilde{u}^{\beta}(x) & в \quad G \\ 0 & в \quad D\setminus G, \end{cases}$$

будем иметь

$$\beta\sum_{i,j=1}^{n}\int_D a_{ij}(u_+)_{x_j}(u_+)_{x_i}(u_+)^{\beta-1}dx=\beta\sum_{i,j=1}^{n}\int_G a_{ij}\tilde{u}_{x_i}(u_+)_{x_j}\tilde{u}^{\beta-1}dx-$$
$$-\lambda\int_G((u_+)^{\beta+1}-u_+(\tilde{u})^{\beta})dx.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\tilde{u}=0$ на множестве тех точек из G, в которых $u\le 0$. Отсюда, пользуясь условием (2), определением G и неравенством Коши, найдем

$$\int_G\left|\nabla u_+\right|^2(u_+)^{\beta-1}dx\le C(\alpha)\left(\int_G\left|\nabla\tilde{u}\right|^2\tilde{u}^{\beta-1}dx+\lambda\int_G(u_+)^{\beta+1}dx\right). \qquad (14)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $v(x)=\max(u_+(x),\tilde{u}(x))$. Из (6) следует, что

$$\int_{D^{(1)}}\left|\nabla v\right|^2 v^{\beta-1}dx\le C(\alpha)\left(\int_{D^{(1)}}\left|\nabla\tilde{u}\right|^2\tilde{u}^{\beta-1}dx+\lambda\int_G(u_+)^{\beta+1}dx\right).$$

Или,

$$\int_{D^{(1)}}\left|\nabla v\right|^2 v^{\beta-1}dx\le C(\alpha)\lambda\left(\int_{D^{(1)}}\left|\nabla\tilde{u}\right|^2\tilde{u}^{\beta-1}dx+\int_{D^{(1)}}u_+^{\beta+1}dx\right).$$

В силу теоремы вложения Соболева (9) и определения множества G_R

$$\left(\int_{D^{(1)}}(u_+)^{k(\beta+1)}dx\right)^{1/k}\le C(\alpha,n,D)(\beta+1)^2\lambda\left(\int_{D^{(1)}}\left|\nabla\tilde{u}\right|\tilde{u}^{\beta-1}dx+\right.$$
$$\left.+\int_{D^{(1)}}(u_+)^{\beta+1}dx\right).$$

Так как $\tilde{u}(x)-$ четное продолжение $u_+(x)$ из $D^{(2)}$ в $D^{(1)}$, то из (12) получим

$$\left(\int_{D^{(1)}}(u_+)^{k(\beta+1)}dx\right)^{1/k}\le C(\alpha,n,D)(\beta+1)^2\lambda\int_D(u_+)^{\beta+1}dx. \qquad (15)$$

Теперь соотношения (13) и (15) дают

$$\left(\int_D(u_+)^{k(\beta+1)}dx\right)^{1/k}\le C(\alpha,n,D)(\beta+1)^2\lambda\int_D(u_+)^{\beta+1}dx.$$

Если провести аналогичные предыдущим рассуждения с заменой функции u_+ на u_- (см.(11)), то будем иметь

$$\left(\int_D (u_-)^{k(\beta+1)} dx\right)^{1/k} \leq C(\alpha,n,D)(\beta+1)^2 \lambda \int_D (u_-)^{\beta+1} dx.$$

Сопоставляя два последних неравенства, найдем

$$\left(\int_D |u|^{k(\beta+1)} dx\right)^{1/k} \leq C(\alpha,n,D)(\beta+1)^2 \lambda \int_D |u|^{\beta+1} dx. \qquad (16)$$

Проинтегрируем эту оценку. Для $i = 0,1,...$ положим $\beta+1 = \chi_i = 2k^i$, где $k = n/(n-2)$ - постоянная из теоремы вложения Соболева (9). Применяя оценку (16) и полагая

$$\Phi_i = \left(\int_D |u|^{\chi_i} dx\right)^{1/\chi_i},$$

получим рекуррентное соотношение

$$\Phi_{i+1} \leq (C(\alpha,n,D))^{1/\chi_i} (\chi_i)^{2/\chi_i} \lambda^{1/\chi_i} \Phi_i.$$

Отсюда по индукции

$$\Phi_{i+1} \leq \prod_{m=0}^{i} (C(\alpha,n,D))^{1/\chi_m} (\chi_i)^{2/\chi_m} \lambda^{1/\chi_m} \Phi_0.$$

Или, поскольку $k = n/(n-2)$, то

$$\sup_{x\in D} |u(x)| = \lim_{t\to\infty} \Phi_i \leq C(\alpha,n,D) \lambda^{n/4} \Phi_0,$$

что дает искомое неравенство (10). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1 является очевидным следствием оценки (10) и соотношения (5). Теорема доказана.

Литература

1. Алхутов Ю.А., Хренова Е.А., Неравенство Харнака для одного классе вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка, Труды Матем. Инст. им.В.А. Стеклова, т.278, 2012, с.7-15.
2. Алхутов Ю.А., Гусейнов С.Т., Гёльдерова непрерывность решений равномерно вырождающегося на части области эллиптического уравнения, Диф. уравнения, т.45, №1, 2009, с.54-59.
3. Ильин В.А., Шишмарев И.А., Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных, Изв. АН СССР, т.24, №6, 1960, с.883-896.
4. Смолицкий Х.Л., Оценки производных фундаментальных функций, ДАН СССР, т.74, №2, 1950, с.205-208.

5. Эйдус Д.М., Некоторые неравенства для собственных функций, ДАН СССР, т.107, № 6, 1956, с.796-798.
6. Эйдус Д.М., Оценки модуля собственных функций. ДАН СССР, т.90, №6, 1953, с.973-974.
7. Якубов В.Я., Оценки по спектральному параметру для собственных функций эллиптических операторов, Функциональный анализ и его приложения, т.33, №.2, 1999, с.58-67.
8. Якубов В.Я., Точные оценки для номированных в L_2 собственных функций эллиптического оператора, Докл. РАН, т.331, №3, 1993, с.286-287.

Oblastın bir hisəsində böyük parametrə malik olan elliptik tənliklər üçün məxsusi funksiyalarIn modulunun müntəzəm qiymətləndirilməsi

S.T. Hüseynov

XÜLASƏ

Əmsalları oblastın bir hissəsində böyük parametrə malik olan ikinci tərtib elliptik operatora baxılır. Parametrdən asılı olmayan normallaşdırılmış məxsusi funksiyalarının maksimumunun modulu qiymətləndirilir.

Açar sözlər: müntəzəm elliptiklik, məxsusi funksiyalar.

On an uniform estimation in domain of the modulus of eigenfunctions for the elliptic equation containing the large parameter on a part of the domain

S.T. Huseynov

ABSTRACT

We consider on elliptic second-order operator coefficients degenerate uniformly with respect to the small parameter on the part of the domain . An estimate is found for the maximum modulus of the normalized eigenfunctions with constants not depending on the small parameter.

Keywords: uniform ellipticity, eigenfunctions.